CZĘŚĆ CZWARTA

RACHUNEK CAŁKOWY OPERATORÓW

ROZDZIAŁ I

Całka funkcji operatorowej i jej zastosowanie

§ 1. Funkcje operatorowe klasy $(\mathcal{K})$

Pojęcie całki w rachunku operatorów dałoby się najwygodniej wprowadzić przez odpowiednie uogólnienie *całki Lebesgue'a*. Można jednak uniknąć teorii całki Lebesgue'a, ograniczając się do pewnej specjalnej klasy funkcyj operatorowych.

Wpierw zdefiniujemy pewną klasę funkcyj $f(\lambda,t)$, którą oznaczymy przez $[\mathcal{K}]$.

O funkcji $f(\lambda,t)$ będziemy mówili, że jest klasy $[\mathcal{K}]$ w obszarze

$$D: \qquad \alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta, \quad 0\leqslant t<\infty,$$

jeżeli:

1. każdy obszar częściowy

$$D_0: \qquad \alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta, \quad 0\leqslant t\leqslant t_0$$

może być przecięty co najwyżej skończoną liczbą prostych równoległych do osi λ i t, zawierających nieskończenie wiele punktów nieciągłości funkcji $f(\lambda,t)$;

2. w punktach ciągłości należących do obszaru D zachodzi nierówność

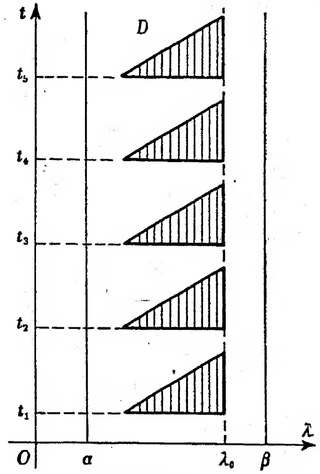
$$|f(\lambda,t)|\leqslant\varphi(\lambda)g(t)$$

przy odpowiednio dobranej funkcji g klasy $\mathcal{K}$ i funkcji $\varphi(\lambda)$, mającej w przedziale $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$ co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości i takiej, że całka $\int\limits_\alpha^\beta|\varphi(\lambda)|d\lambda$ (rozumiana w zwykłym sensie) ma wartość skończoną.

Na przykład funkcja $f(\lambda,t)$, która jest równa 1 w trójkątach zakreskowanych na rysunku 132, a poza tym jest równa zeru w całym obszarze D, ma punkty nieciągłości wzdłuż obwodów trójkątów. Każda z prostych

$$(1.1) \qquad \lambda=\lambda_0, \quad t=t_1, \quad t=t_2, \quad \ldots$$

zawiera nieskończenie wiele punktów nieciągłości, każda zaś inna prosta równoległa do osi λ lub t zawiera co najwyżej dwa punkty nieciągłości. Każda część ograniczona obszaru D jest przecięta przez skończoną liczbę prostych (1.1), zatem własność 1 jest spełniona.



Rys. 132.

Ponadto widać, że własność 2 jest również spełniona. Zatem rozważana funkcja należy do klasy $[\mathcal{K}]$.

W szczególności każda funkcja $f(\lambda,t)$, która jest ciągła w obszarze D, jest funkcją klasy $[\mathcal{K}]$. Również każda funkcja kształtu $\varphi(\lambda)g(t)$, gdzie φ i g mają własności 2, jest funkcją klasy $[\mathcal{K}]$.

O funkcji operatorowej $f(\lambda)$ będziemy mówili, że jest funkcją klasy $(\mathcal{K})$ w przedziale $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$, jeżeli da się przedstawić w postaci

$$(1.2) \qquad f(\lambda)=q\{f_1(\lambda,t)\},$$

gdzie q jest operatorem, zaś funkcja $f_1(\lambda,t)$ jest funkcją klasy $[\mathcal{K}]$ w obszarze D.

W szczególności *każda funkcja operatorowa ciągła jest funkcją klasy* $(\mathcal{K})$.

§ 2. Definicja całki

Przez całkę z funkcji $f(\lambda)$ klasy $(\mathcal{K})$ w przedziale $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$ będziemy rozumieli operator

$$(2.1) \qquad \int\limits_\alpha^\beta f(\lambda)\,d\lambda=q\Big\{\int\limits_\alpha^\beta f_1(\lambda,t)\,d\lambda\Big\}$$

przy oznaczeniu (1.2).

Definicję (2.1) przyjmu my również, gdy $\beta\leqslant\alpha$.

Każdą funkcję operatorową klasy $(\mathcal{K})$ można przedstawić w postaci (1.2) na nieskończenie wiele sposobów. Gdy bowiem $a \in \mathcal{C}$ i $a \neq 0$, to możemy zawsze napisać

$$f(\lambda) = \frac{q}{a}\{f_2(\lambda, t)\},$$

gdzie funkcja $f_2(\lambda,t) = \int_0^t a(t-\tau) f_1(\lambda,\tau)\, d\tau$ jest podobnie jak $f_1(\lambda,t)$ funkcją klasy $[\mathcal{K}]$.

Aby definicja całki była jednoznaczna, równość

$$q_1\{f_1(\lambda,t)\} = q_2\{f_2(\lambda,t)\} \tag{2.2}$$

musi za sobą pociągać równość

$$q_1\Big\{\int_\alpha^\beta f_1(\lambda,t)\,d\lambda\Big\} = q_2\Big\{\int_\alpha^\beta f_2(\lambda,t)\,d\lambda\Big\}. \tag{2.3}$$

Jest tak w istocie, gdyż pisząc

$$q_1 = \frac{a_1}{c} \qquad \text{i} \qquad q_2 = \frac{a_2}{c}, \tag{2.4}$$

gdzie a_1, a_2 i $c \neq 0$ są elementami klasy $\mathcal{C}$, mamy wobec (2.2)

$$\int_0^t a_1(t-\tau) f_1(\lambda,\tau)\,d\tau = \int_0^t a_2(t-\tau) f_2(\lambda,\tau)\,d\tau \tag{2.5}$$

w obszarze D. Całkując (2.5) względem λ i przestawiając kolejność znaków całki, dochodzimy do równości

$$\int_0^t a_1(t-\tau)\Big[\int_\alpha^\beta f_1(\lambda,\tau)\,d\lambda\Big]d\tau = \int_0^t a_2(t-\tau)\Big[\int_\alpha^\beta f_2(\lambda,\tau)\,d\lambda\Big]d\tau,$$

a stąd

$$a_1\Big\{\int_\alpha^\beta f_1(\lambda,t)\,d\lambda\Big\} = a_2\Big\{\int_\alpha^\beta f_2(\lambda,t)\,d\lambda\Big\}.$$

Po podzieleniu przez c otrzymujemy równość (2.3).

Stwierdziliśmy w ten sposób jednoznaczność definicji całki.

Jeżeli funkcja $f(\lambda)$ jest liczbowa, to powyższa definicja pokrywa się ze zwykłą definicją całki. W istocie, można wtedy napisać $f(\lambda) = s\{f(\lambda)\}$ i

$$\int_\alpha^\beta f(\lambda)\,d\lambda = s\Big\{\int_\alpha^\beta f(\lambda)\,d\lambda\Big\},$$

gdzie całka z lewej strony jest rozumiana w sensie operatorowym, z prawej zaś strony w sensie zwykłym.

§ 3. Własności całki

Całka z funkcji operatorowej ma podobne własności jak zwykła całka.

Własność I. $\int_\alpha^\alpha f(\lambda)\,d\lambda = 0.$

Istotnie jest

$$\int_\alpha^\alpha f(\lambda)\,d\lambda = q\Big\{\int_\alpha^\alpha f_1(\lambda,t)\,d\lambda\Big\} = q\{0\} = 0.$$

Własność II. $\int_\alpha^\beta f(\lambda)\,d\lambda = -\int_\beta^\alpha f(\lambda)\,d\lambda.$

Istotnie jest

$$\int_\alpha^\beta f(\lambda)\,d\lambda = q\Big\{\int_\alpha^\beta f_1(\lambda,t)\,d\lambda\Big\} = q\Big\{-\int_\beta^\alpha f_1(\lambda,t)\,d\lambda\Big\} =$$

$$= -q\Big\{\int_\beta^\alpha f_1(\lambda,t)\,d\lambda\Big\} = -\int_\beta^\alpha f(\lambda)\,d\lambda.$$

Własność III. $\int_\alpha^\beta f(\lambda)\,d\lambda = \int_\alpha^\gamma f(\lambda)\,d\lambda + \int_\gamma^\beta f(\lambda)\,d\lambda.$

Istotnie, jest

$$\int_\alpha^\beta f(\lambda)\,d\lambda = q\Big\{\int_\alpha^\beta f_1(\lambda,t)\,d\lambda\Big\} = q\Big\{\int_\alpha^\gamma f_1(\lambda,t)\,d\lambda + \int_\gamma^\beta f_1(\lambda,t)\,d\lambda\Big\} =$$

$$= \int_\alpha^\gamma f(\lambda)\,d\lambda + \int_\gamma^\beta f(\lambda)\,d\lambda.$$

Własność IV. $\int_\alpha^\beta cf(\lambda)\,d\lambda = c\int_\alpha^\beta f(\lambda)\,d\lambda$ (dla każdego operatora c).

Istotnie, przedstawiając $f(\lambda)$ w postaci (1.2) mamy $cf(\lambda) = cq\{f_1(\lambda,t)\}$ i wobec tego w myśl definicji całki

$$\int_\alpha^\beta cf(\lambda)\,d\lambda = cq\Big\{\int_\alpha^\beta f_1(\lambda,t)\,d\lambda\Big\} = c\int_\alpha^\beta f(\lambda)\,d\lambda.$$

Własność V. $\int_\alpha^\beta [f(\lambda)\pm g(\lambda)]\,d\lambda = \int_\alpha^\beta f(\lambda)\,d\lambda \pm \int_\alpha^\beta g(\lambda)\,d\lambda.$

Istotnie, możemy napisać

$$f(\lambda) = q_1\{f_1(\lambda,t)\}, \qquad g(\lambda) = q_2\{g_1(\lambda,t)\}, \tag{3.1}$$

gdzie zarówno funkcja $f_1(\lambda,t)$ jak i funkcja $g_1(\lambda,t)$ są klasy $[\mathcal{K}]$. Przyjmując (2.4) będziemy mieli

$$f(\lambda) = \frac{1}{c}\{f_2(\lambda,t)\} \quad \text{i} \quad g(\lambda) = \frac{1}{c}\{g_2(\lambda,t)\},$$

gdzie $\{f_2(\lambda,t)\} = a_1\{f_1(\lambda,t)\}$ i $\{g_2(\lambda,t)\} = a_2\{g_1(\lambda,t)\}$. Zatem

$$f(\lambda)\pm g(\lambda) = \frac{1}{c}\{f_2(\lambda,t)\pm g_2(\lambda,t)\},$$

a stąd

$$\int_\alpha^\beta [f(\lambda)\pm g(\lambda)]\,d\lambda = \frac{1}{c}\Big\{\int_\alpha^\beta [f_2(\lambda,t)\pm g_2(\lambda,t)]\,d\lambda\Big\} =$$

$$= \frac{1}{c}\Big\{\int_\alpha^\beta f_2(\lambda,t)\,d\lambda\Big\} \pm \frac{1}{c}\Big\{\int_\alpha^\beta g_2(\lambda,t)\,d\lambda\Big\} = \int_\alpha^\beta f(\lambda)\,d\lambda \pm \int_\alpha^\beta g(\lambda)\,d\lambda.$$

Własność VI. *Jeżeli funkcje operatorowe $f(\lambda)$ i $g(\lambda)$ mają pochodne ciągłe w przedziale $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$, to*

$$\int_\alpha^\beta f'(\lambda)g(\lambda)\,d\lambda = f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_\alpha^\beta f(\lambda)g'(\lambda)\,d\lambda.$$

Istotnie, pisząc (3.1), mamy

$$\int_\alpha^\beta f'(\lambda)g(\lambda)\,d\lambda = q_1q_2\Big\{\int_\alpha^\beta\Big[\int_0^t \frac{\partial}{\partial\lambda}f_1(\lambda,t-\tau)g_1(\lambda,\tau)\,d\tau\Big]d\lambda\Big\} =$$

$$= q_1q_2\Big\{\int_0^t\Big[\int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial\lambda}f_1(\lambda,t-\tau)g_1(\lambda,\tau)\,d\lambda\Big]d\tau\Big\} =$$

$$= q_1q_2\Big\{\int_0^t\Big[f_1(\beta,t-\tau)g_1(\beta,\tau) - f_1(\alpha,t-\tau)g_1(\alpha,\tau) - \int_\alpha^\beta f(\lambda,t-\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}g_1(\lambda,\tau)\,d\lambda\Big]d\tau\Big\} =$$

$$= f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_\alpha^\beta f(\lambda)g'(\lambda)\,d\lambda.$$

Własność VII. *Jeżeli $\varphi(\lambda)$ jest funkcją liczbową, mającą pochodną ciągłą $\varphi'(\lambda)$, a $f(\lambda)$ dowolną funkcją operatorową ciągłą, to*

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(\lambda)]\varphi'(\lambda)\,d\lambda = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\lambda)\,d\lambda.$$

Istotnie, jest

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(\lambda)]\varphi'(\lambda)\,d\lambda = q\Big\{\int_\alpha^\beta f_1[\varphi(\lambda),t]\varphi'(\lambda)\,d\lambda\Big\} =$$

$$= q\Big\{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f_1(\lambda,t)\,d\lambda\Big\} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\lambda)\,d\lambda.$$

Własność VIII. *Jeżeli funkcja operatorowa $f(\lambda)$ jest ciągła, to funkcja*

$$F(\lambda) = \int_\alpha^\lambda f(\varkappa)\,d\varkappa$$

ma pochodną $F'(\lambda) = f(\lambda)$.

Istotnie,

$$F'(\lambda) = q\Big\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_\alpha^\lambda f_1(\varkappa,t)\,d\varkappa\Big\} = q\{f_1(\lambda,t)\} = f(\lambda).$$

§ 4. Funkcje operatorowe dwóch zmiennych

Jeżeli każdemu punktowi $(\lambda, \varkappa)$ pewnego obszaru jest przyporządkowany pewien operator, to mówimy, że w tym obszarze jest określona funkcja operatorowa dwóch zmiennych $f(\lambda, \varkappa)$.

Funkcja $f(\lambda, \varkappa)$ jest *ciągła* w prostokącie

$$\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2, \qquad \varkappa_1 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_2, \tag{4.1}$$

jeżeli istnieje operator q i funkcja trzech zmiennych $f_1(\lambda, \varkappa, t)$ (o wartościach liczbowych) ciągła w obszarze

$$\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2, \qquad \varkappa_1 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_2, \qquad 0 \leqslant t < \infty, \tag{4.2}$$

taka że

$$f(\lambda, \varkappa) = q\{f_1(\lambda, \varkappa, t)\}. \tag{4.3}$$

Gdy $\varkappa$ ustalimy dowolnie w przedziale $\varkappa_1 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_2$, to $f(\lambda, \varkappa)$ możemy traktować jako funkcję jednej zmiennej λ

$$g(\lambda) = f(\lambda, \varkappa).$$

Funkcja $g(\lambda)$ jest ciągła w przedziale $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$, gdy $f(\lambda, \varkappa)$ jest ciągła w (4.1).

Podobnie, gdy ustalimy λ dowolnie w przedziale $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$, to $f(\lambda, \varkappa)$ możemy uważać za funkcję jednej zmiennej $\varkappa$

$$h(\varkappa) = f(\lambda, \varkappa).$$

Funkcja $h(\varkappa)$ jest ciągła w przedziale $\varkappa_1 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_2$, gdy $f(\lambda, \varkappa)$ jest ciągła w (4.1).

Definicję ciągłości funkcji operatorowej dwóch zmiennych można rozszerzyć na dowolny obszar, mówiąc, że jest w nim ciągła, gdy jest ciągła w każdym prostokącie (4.1) w nim zawartym.

Przez pochodną cząstkową $\frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, \varkappa)$ rozumiemy pochodną względem λ $(f(\lambda, \varkappa))'$ przy dowolnie ustalonym $\varkappa$. Ograniczymy się do przypadku, kiedy pochodna ta jest ciągła. Istnieje wówczas operator q i funkcja $f_1(\lambda, \varkappa, t)$ (o wartościach liczbowych), mająca pochodną cząstkową (w zwykłym sensie)

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, \varkappa, t)$$

ciągłą w (4.2) i taką że

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, \varkappa) = q\left\{\frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, \varkappa, t)\right\}.$$

Udowodnimy jeszcze następującą własność całki:

Własność IX. *Jeżeli funkcja operatorowa dwóch zmiennych $f(\lambda, \varkappa)$ jest ciągła w kwadracie*

$$\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta, \qquad \alpha \leqslant \varkappa \leqslant \beta$$

i ma pochodną cząstkową $\frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, \varkappa)$ ciągłą w tym kwadracie, to przy dowolnie ustalonym λ_0 $(\alpha \leqslant \lambda_0 \leqslant \beta)$ mamy wzór

$$\left(\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(\lambda, \varkappa)\, d\varkappa\right)' = f(\lambda, \lambda) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, \varkappa)\, d\varkappa \qquad (\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta).$$

Dowód.

$$\left(\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(\lambda, \varkappa)\, d\varkappa\right)' = q\left\{\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda} f_1(\lambda, \varkappa, t)\, d\varkappa\right\} =$$

$$= q\left\{f_1(\lambda, \lambda, t) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, \varkappa, t)\, d\varkappa\right\} = f(\lambda, \lambda) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, \varkappa)\, d\varkappa.$$

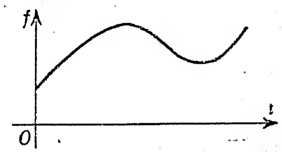
Własność IX można uogólnić na przypadek, kiedy granice całkowania są dowolnymi różniczkowalnymi funkcjami liczbowymi.

§ 5. Obcinanie funkcji

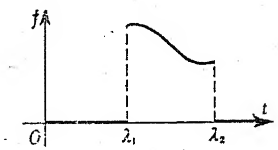
Udowodnimy, że jeżeli $f(\lambda)$ przyjmuje wartości liczbowe w przedziale $[\lambda_1, \lambda_2]$, to

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\lambda s} f(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} f(t) & \text{w przedziale } \lambda_1 < t < \lambda_2 \\ 0 & \text{poza tym przedziałem} \end{cases} \qquad (0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2). \tag{5.1}$$

Znaczenie tego wzoru ilustrują wykresy, przedstawione na rysunkach 133 i 134.



Rys. 133.



Rys. 134.

Wzór (5.1) pozwala więc niejako *obcinać* funkcję f poza dowolnym przedziałem (λ_1, λ_2).

Aby wzór ten udowodnić, przyjmujemy najpierw, że $\lambda_1=0$. Ponieważ $e^{-\lambda s}=s\{h(\lambda,t)\}$, gdzie

$$h(\lambda,t)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0\leqslant t<\lambda, \\ 1 & \text{dla} \quad 0\leqslant \lambda<t, \end{cases}$$

więc

$$\int_0^{\lambda_2} e^{-\lambda s}f(\lambda)\,d\lambda = s\Big\{\int_0^{\lambda_2} h(\lambda,t)f(\lambda)\,d\lambda\Big\} = s\Big\{\int_0^{t} 1\cdot g(\lambda_2,\lambda)\,d\lambda\Big\} = \{g(\lambda_2,t)\},$$

gdzie

$$g(\lambda,t)=\begin{cases} f(t) & \text{dla} \quad 0\leqslant t<\lambda, \\ 0 & \text{dla} \quad 0\leqslant \lambda<t. \end{cases}$$

Przypadek $\lambda_1>0$ sprowadza się do poprzedniego przez rozbicie całki we wzorze (5.1) na dwie całki

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\lambda s}f(\lambda)\,d\lambda = \int_0^{\lambda_2} e^{-\lambda s}f(\lambda)\,d\lambda - \int_0^{\lambda_1} e^{-\lambda s}f(\lambda)\,d\lambda.$$

Jeżeli funkcja $f(t)$ jest periodyczna o periodzie $2\lambda_0$, to mamy wzór

$$\{f(t)\} = \frac{\int_0^{2\lambda_0} e^{-\lambda s}f(\lambda)\,d\lambda}{1-e^{-2\lambda_0 s}}.$$

Istotnie, całka w liczniku przedstawia funkcję obciętą w punkcie $t=2\lambda_0$, a więc jeden period funkcji; natomiast mianownik powoduje powtórzenie tego periodu obok siebie nieskończenie wiele razy w odstępach $2\lambda_0$.

Mamy więc na przykład

$$\{\sin t\} = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-\lambda s}\sin\lambda\,d\lambda}{1-e^{-2\pi s}};$$

całkując dwukrotnie przez części, dochodzimy do znanego wzoru $\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1}$ (nie jest to oczywiście najprostszy sposób wyprowadzenia tego wzoru).

Inną funkcję przedstawia wyrażenie

$$\{f(t)\} = \frac{\int_0^{\pi} e^{-\lambda s}\sin\lambda\,d\lambda}{1-e^{-2\pi s}};$$

wykres tej funkcji wyobraża sinusoidę obciętą w punkcie $t=\pi$ i powtórzoną następnie nieskończenie wiele razy w odstępach 2π. Wykres taki podaliśmy na rysunku 96 (str. 144).

Obliczając całkę w liczniku według prawideł całkowania, znajdujemy

$$\int_0^{\pi} e^{-\lambda s}\sin\lambda\,d\lambda = \frac{1+e^{-\pi s}}{1+s^2};$$

jest zatem

$$\{f(t)\} = \frac{1}{1+s^2}\cdot\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-2\pi s}} = \frac{1}{(1+s^2)(1-e^{-\pi s})}$$

zgodnie z wzorem znalezionym w części II (str. 144).

Funkcja

$$\{g(t)\} = \frac{\int_0^{\beta/2} e^{-\lambda s}\,d\lambda}{1-e^{-\beta s}}$$

ma wartość 1 w przedziale $0<t<\beta/2$ oraz w każdym przedziale przesuniętym o $n\beta$, to znaczy w przedziałach $n\beta<t<(2n+1)\beta/2$ $(n=0,1,\ldots)$. Ale mamy

$$\int_0^{\beta/2} e^{-\lambda s}\,ds = \frac{1-e^{-\beta s/2}}{s},$$

więc

$$\{g(t)\} = \frac{1-e^{-\beta s/2}}{s(1-e^{-\beta s})} = \frac{1}{s(1+e^{-\beta s/2})},$$

zgodnie z wzorem z paragrafu 15 części II (str. 145).

§ 6. Postać całkowa pewnego rozwiązania szczególnego równania różniczkowego logarytmicznego

Załóżmy, że równanie operatorowe

$$a_m x^{(m)} + \ldots + a_0 x = 0 \tag{6.1}$$

jest logarytmiczne, to znaczy, że wszystkie pierwiastki jego równania charakterystycznego (w liczbie m) są logarytmami. Wówczas rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(\lambda) = c_1 x_1(\lambda) + \ldots + c_m x_m(\lambda),$$

gdzie $c_1, \ldots, c_m$ są dowolnymi operatorami, a funkcje $x_1(\lambda), \ldots, x_m(\lambda)$ mają postać $\lambda^\mu e^{\lambda w}$. Dobierzmy stałe $c_1, \ldots, c_m$ w ten sposób, żeby

$$x^{(\nu)}(0) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant \nu \leqslant m-2, \qquad x^{(m-1)}(0) = 1. \tag{6.2}$$

W tym celu rozwiązujemy układ równań

$$\begin{aligned} c_1 x_1(0) \quad &+ \ldots + c_m x_m(0) \quad = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 x_1^{(m-2)}(0) &+ \ldots + c_m x_m^{(m-2)}(0) = 0, \\ c_1 x_1^{(m-1)}(0) &+ \ldots + c_m x_m^{(m-1)}(0) = 1. \end{aligned}$$

Wprowadzając wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} x_1(0) & \ldots & x_m(0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(m-2)}(0) & \ldots & x_m^{(m-2)}(0) \\ x_1^{(m-1)}(0) & \ldots & x_m^{(m-1)}(0) \end{vmatrix}$$

i oznaczając przez $D_1, \ldots, D_m$ jego minory odpowiadające elementom ostatniego wiersza, możemy napisać

$$c_1 = \frac{D_1}{D}, \quad \ldots, \quad c_m = \frac{D_m}{D};$$

jak wiadomo z paragrafu 8 części III wyznacznik D jest zawsze różny od zera.

Wobec tego szukane rozwiązanie ma postać

$$x(\lambda) = \frac{D_1 x_1(\lambda) + \ldots + D_m x_m(\lambda)}{D};$$

łatwo zauważyć, że licznik jest rozwinięciem wyznacznika

$$E(\lambda) = \begin{vmatrix} x_1(0) & \ldots & x_m(0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(m-2)}(0) & \ldots & x_m^{(m-2)}(0) \\ x_1(\lambda) & \ldots & x_m(\lambda) \end{vmatrix},$$

który powstaje z wyznacznika D przez zastąpienie ostatniego wiersza przez $x_1(\lambda), \ldots, x_m(\lambda)$.

Rozwiązanie $x(\lambda)$ można więc zapisać jako iloraz dwóch wyznaczników

$$x(\lambda) = \frac{E(\lambda)}{D}.$$

Weźmy teraz pod uwagę wyrażenie

$$x_0(\lambda) = \int_0^\lambda f(\varkappa)\, x(\lambda-\varkappa)\, d\varkappa, \tag{6.3}$$

gdzie $f(\varkappa)$ jest dowolną funkcją operatorową ciągłą. Korzystając z własności IX całki, udowodnionej w paragrafie 4, oraz z równości (6.2), łatwo wyliczyć, że

$$x_0'(\lambda) = \int_0^\lambda f(\varkappa)\, x'(\lambda-\varkappa)\, d\varkappa,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_0^{(m-1)}(\lambda) = \int_0^\lambda f(\varkappa)\, x^{(m-1)}(\lambda-\varkappa)\, d\varkappa,$$

$$x_0^{(m)}(\lambda) = \int_0^\lambda f(\varkappa)\, x^{(m)}(\lambda-\varkappa)\, d\varkappa + f(\lambda).$$

Stąd

$$a_m x_0^{(m)}(\lambda) + \ldots + a_0 x_0(\lambda) =$$

$$= \int_0^\lambda f(\varkappa) [a_m x^{(m)}(\lambda-\varkappa) + \ldots + a_0 x(\lambda-\varkappa)]\, d\varkappa + a_m f(\lambda).$$

Ponieważ funkcja $x(\lambda)$ spełnia równanie (6.1), wyrażenie w nawiasie graniastym jest równe identycznie zeru i widać, że $x_0(\lambda)$ jest rozwiązaniem równania niejednorodnego

$$a_m x^{(m)} + \ldots + a_0 x = a_m f(\lambda);$$

wprowadzając wyznaczniki D i $E(\lambda)$, rozwiązanie to możemy zapisać w postaci

$$x_0(\lambda) = \int_0^\lambda f(\varkappa) \frac{E(\lambda-\varkappa)}{D} d\varkappa. \tag{6.4}$$

Widzimy więc, że *w przypadku równania logarytmicznego istnieje zawsze rozwiązanie, o ile tylko prawa strona $f(\lambda)$ jest funkcją ciągłą.*

Warto zauważyć, co wynika z wzorów (6.3) i (6.4), że rozwiązanie $x_0(\lambda)$ spełnia warunki początkowe

$$x_0^{(\nu)}(0) = 0 \qquad (\nu = 0, \ldots, m-1).$$

§ 7. Zastosowanie do równania struny drgającej

W przypadku równania

$$x'' - \alpha^2 s^2 x = 0 \tag{7.1}$$

mamy rozwiązanie ogólne

$$x(\lambda) = c_1 e^{-\alpha\lambda s} + c_2 e^{\alpha\lambda s}.$$

Wyznaczniki D i E mają wtedy postać

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha s & \alpha s \end{vmatrix} = 2\alpha s, \qquad E(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\alpha\lambda s} & e^{\alpha\lambda s} \end{vmatrix} = e^{\alpha\lambda s} - e^{-\alpha\lambda s}.$$

Stąd znajdujemy od razu funkcję

$$x(\lambda) = \frac{e^{\alpha\lambda s} - e^{-\alpha\lambda s}}{2\alpha s} = \frac{1}{\alpha s} \operatorname{sh} \alpha\lambda s,$$

która spełnia równanie (7.1) i warunki

$$x(0) = 0, \qquad x'(0) = 1.$$

Dla równania niejednorodnego

$$x'' - \alpha^2 s^2 x = f(\lambda) \tag{7.2}$$

mamy więc rozwiązanie szczególne

$$x_0(\lambda) = \frac{1}{\alpha s} \int_0^\lambda f(\varkappa) \operatorname{sh}[\alpha(\lambda-\varkappa)s]\, d\varkappa.$$

Rozwiązanie ogólne równania (7.2) można napisać w postaci

$$x(\lambda) = c_1 e^{-\alpha\lambda s} + c_2 e^{\alpha\lambda s} + \frac{1}{\alpha s} \int_0^\lambda f(\varkappa) \operatorname{sh}[\alpha(\lambda-\varkappa)s]\, d\varkappa. \tag{7.3}$$

W paragrafie 25 części II rozważaliśmy przypadek, gdy

$$f(\lambda) = -\alpha^2 s \varphi(\lambda) \qquad (\alpha > 0), \tag{7.4}$$

$$x(0) = 0 \quad \text{i} \quad x(\lambda_0) = 0, \tag{7.5}$$

gdzie $\varphi(\lambda)$ jest dowolną ciągłą funkcją liczbową. Dla dostosowania we wzorze (7.3) stałych c_1 i c_2 do warunków (7.5) musimy rozwiązać układ równań

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$c_1 e^{-\alpha\lambda_0 s} + c_2 e^{\alpha\lambda_0 s} - \alpha \int_0^{\lambda_0} \varphi(\varkappa) \operatorname{sh}[\alpha(\lambda_0-\varkappa)s]\, d\varkappa = 0.$$

Po wyliczeniu wartości c_1 i c_2 i podstawieniu ich do (7.3) znajdujemy, uwzględniając równość (7.4),

$$x_0(\lambda) = \frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha\lambda s}{\operatorname{sh} \alpha\lambda_0 s} \int_0^{\lambda_0} \varphi(\varkappa) \operatorname{sh}[\alpha(\lambda_0-\varkappa)s]\, d\varkappa - \\ - \alpha \int_0^\lambda \varphi(\varkappa) \operatorname{sh}[\alpha(\lambda-\varkappa)s]\, d\varkappa. \tag{7.6}$$

Ale poprzednio znaleźliśmy rozwiązanie tego samego zagadnienia w postaci

$$\frac{1}{2}\left\{\varphi\left(\lambda+\frac{t}{\alpha}\right) + \varphi\left(\lambda-\frac{t}{\alpha}\right)\right\},$$

gdzie przyjęto $-\varphi(-\lambda) = \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda + 2\lambda_0)$. Ponieważ znalezione rozwiązanie jest jedyne, więc musi być

$$x_0(\lambda) = \frac{1}{2}\left\{\varphi\left(\lambda+\frac{t}{\alpha}\right) + \varphi\left(\lambda-\frac{t}{\alpha}\right)\right\};$$

do równości tej można dojść wprost z wzoru (7.6), ale rachunek jest dość żmudny.

Podamy inne zastosowanie wzoru (7.3).

Rozwiążmy równanie cząstkowe

(7.7) $$x_{\lambda\lambda}-x_{tt}=0 \qquad (0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0,\ \ 0\leqslant t<\infty)$$

przy warunkach początkowych

(7.8) $$x(\lambda,0)=h_0(\lambda),\qquad x_t(\lambda,0)=h_1(\lambda),$$

(7.9) $$x(0,t)=v_0(t);\qquad x_\lambda(0,t)=v_1(t).$$

Zagadnieniu temu odpowiada równanie operatorowe

(7.10) $$x''-s^2x=-sh_0(\lambda)-h_1(\lambda)$$

z warunkami

(7.11) $$x(0)=v_0,\qquad x'(0)=v_1.$$

Rozwiązanie ogólne ma kształt

(7.12) $$x(\lambda)=c_1e^{-\lambda s}+c_2e^{\lambda s}-\int_0^\lambda[h_0(\varkappa)+lh_1(\varkappa)]\,\mathrm{sh}\,[(\lambda-\varkappa)s]\,ds.$$

Wobec warunków (7.11) musi być

$$c_1+c_2=v_0,\qquad -sc_1+sc_2=v_1;$$

stąd znajdujemy

$$c_1=\frac{v_0}{2}-\frac{v_1}{2s}\qquad\text{i}\qquad c_2=\frac{v_0}{2}+\frac{v_1}{2s}.$$

Podstawiając te wartości do (7.12), mamy po prostym przekształceniu

$$x(\lambda)=\tfrac{1}{2}(v_0-lv_1)\,e^{-\lambda s}+\tfrac{1}{2}\int_0^\lambda e^{-(\lambda-\varkappa)s}[h_0(\varkappa)+lh_1(\varkappa)]\,d\varkappa+\tfrac{1}{2}e^{\lambda s}y(\lambda),$$

gdzie

$$y(\lambda)=v_0+lv_1-\int_0^\lambda e^{-\varkappa s}[h_0(\varkappa)+lh_1(\varkappa)]\,d\varkappa.$$

Funkcja $x(\lambda)$ będzie parametryczna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $y(\lambda)=\{y(\lambda,t)\}$ będzie parametryczna i gdy ponadto będzie

(7.13) $$y(\lambda,t)=0\qquad \text{dla } 0\leqslant t\leqslant\lambda.$$

Ale mamy

$$\int_0^\lambda e^{-\varkappa s}[h_0(\varkappa)+lh_1(\varkappa)]\,d\varkappa=\begin{cases} h_0(t)+\int_0^t h_1(\tau)\,d\tau & \text{dla } 0\leqslant t<\lambda,\\ 0 & \text{dla } 0\leqslant\lambda<t\end{cases}$$

i wobec tego

$$y(\lambda,t)=v_0(t)+\int_0^t v_1(\tau)\,d\tau-h_0(t)-\int_0^t h_1(\tau)\,d\tau\qquad\text{dla } 0\leqslant t<\lambda.$$

Ponieważ λ zmienia się w przedziale $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$, więc z warunku (7.13) dostajemy

(7.14) $$v_0(t)+\int_0^t v_1(\tau)\,d\tau=h_0(t)+\int_0^t h_1(\tau)\,d\tau\qquad\text{dla } 0\leqslant t\leqslant\lambda_0.$$

Jest to warunek konieczny i wystarczający, żeby rozwiązanie (7.12) spełniające równości (7.11) było funkcją parametryczną.

Stąd wynika, że dla równania cząstkowego (7.7) warunki (7.8) i (7.9) nie mogą być dane zupełnie dowolnie, lecz muszą spełniać zależność (7.14). Wobec tego wystarczy podać na przykład warunki (7.8) i którykolwiek z warunków (7.9), a drugi można wyznaczyć ze związku (7.14).

Przykład. Znaleźć funkcję $x(\lambda,t)$ spełniającą równanie

(7.15) $$x_{\lambda\lambda}-x_{tt}=0\qquad(0\leqslant\lambda<\infty,\ \ 0\leqslant t<\infty)$$

i warunki

(7.16) $$x(\lambda,0)=\lambda^2,\qquad x(0,t)=t^3,\qquad x_\lambda(0,t)=0.$$

Ze związku (7.14) wyliczamy łatwo

$$x_t(\lambda,0)=3\lambda^2-2\lambda.$$

Wobec tego równanie operatorowe ma postać

$$x''-s^2x=-s\lambda^2-3\lambda^2+2\lambda.$$

Rozwiązania szczególnego nie opłaca się jednak wyznaczać z ogólnego wzoru całkowego (7.6), lepiej znaleźć rozwiązanie wielomienne. Ma ono postać

$$x_0(\lambda)=3l^2\lambda^2+l\lambda^2-2l^2\lambda+2l^3+6l^4.$$

Stąd rozwiązanie ogólne

$$x(\lambda)=c_1e^{-\lambda s}+c_2e^{\lambda s}+x_0(\lambda).$$

Aby to rozwiązanie było funkcją parametryczną, musimy przyjąć $c_2=0$. Stałą c_1 wyznaczamy z warunku początkowego $x(0)=6l^4$

$$c_1+2l^3+6l^4=6l^4.$$

Stąd znajdujemy

$$c_1=-2l^3.$$

Wobec tego jest

$$x(\lambda)=-2l^3e^{-\lambda s}+3l^2\lambda^2+l\lambda^2-2l^2\lambda+2l^3+6l^4,$$

a po uwzględnieniu znaczenia operatora przesunięcia

$$x(\lambda,t)=\begin{cases}3\lambda^2t+\lambda^2-2\lambda t+t^2+t^3 & \text{dla}\quad 0\leqslant t\leqslant\lambda,\\ 3\lambda^2t+t^3 & \text{dla}\quad 0\leqslant\lambda\leqslant t.\end{cases}$$

Jest to jedyna funkcja spełniająca w obszarze $0\leqslant\lambda<\infty$, $0\leqslant t<\infty$ równanie (7.15) a ponadto warunki (7.16).

Uwaga. Warunek (7.14) wystarcza, by rozwiązanie równania operatorowego (7.10) było funkcją parametryczną, nie zapewnia jednak, że ta funkcja będzie różniczkowalna w zwykłym sensie. W przypadku rozwiązywania równania cząstkowego (7.7) należy więc na końcu sprawdzić różniczkowalność znalezionej funkcji. O ile jest ona nieróżniczkowalna, to przy danych warunkach początkowych rozwiązanie równania cząstkowego nie istnieje w ogóle i zagadnienie może mieć sens matematyczny tylko wtedy, gdy je traktujemy z punktu widzenia operatorów.

§ 8. Zastosowanie szeregów nieskończonych i całek oznaczonych

Wzór (6.4) może być stosowany tylko wtedy, gdy dane równanie jest logarytmiczne. W innych przypadkach mogą być nieraz z powodzeniem stosowane rozwinięcia na szeregi nieskończone lub metoda całek oznaczonych.

Przykłady rozwinięć na szeregi trygonometryczne mieliśmy już w części II (§§ 40-46). Tu podamy inne przykłady.

Przykład 1. Rozwiązać równanie

(8.1) $$x_{\lambda^2}+x_{t^3}=0\qquad(-1<\lambda<1,\ 0\leqslant t<\infty)$$

przy warunkach

(8.2) $$x(\lambda,0)=0,\qquad x_t(\lambda,0)=0,\qquad x_{tt}(\lambda,0)=\frac{1}{1-\lambda}.$$

Równanie operatorowe ma postać

(8.3) $$x''+s^3x=\frac{1}{1-\lambda}.$$

Funkcja $\frac{1}{1-\lambda}$ rozwija się na szereg potęgowy

$$1+\lambda+\lambda^2+\ldots$$

Szukając rozwiązania wielomiennego $x_n(\lambda)$ równania

$$x''+s^3x=\lambda^n,$$

znajdujemy

$$x_n(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{n!}{n!}l^3\lambda^n-\dfrac{n!}{(n-2)!}l^6\lambda^{n-2}+\ldots+(-1)^{n/2}\cdot\dfrac{n!}{0!}l^{\frac{3}{2}(n+2)}, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste;}\\[2mm] \dfrac{n!}{n!}l^3\lambda^n-\dfrac{n!}{(n-2)!}l^6\lambda^{n-2}+\ldots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{n!}{1!}l^{\frac{3}{2}(n+1)}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste.}\end{cases}$$

Formalnym rozwiązaniem równania (8.3) będzie wyrażenie

(8.4) $$x(\lambda)=x_0(\lambda)+x_1(\lambda)+\ldots=c_0+c_1\lambda+\ldots,$$

gdzie

$$c_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{(n+2\nu)!}{n!}l^{3(\nu+1)}=\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{(n+2\nu)!}{n!(3\nu+2)!}\cdot^{3\nu+2}\right\}.$$

Jest widoczne, że szeregi wewnątrz klamry { } są zbieżne jednostajnie w każdym przedziale $[0,t_0]$; stąd wynika, że współczynniki c_n mają sens. Można udowodnić, że szereg $c_0+c_1\lambda+\ldots$ jest zbieżny (operatorowo) dla $|\lambda|<1$. Stąd wynika, że przedstawia on rzeczywiście (nie tylko formalnie) funkcję operatorową, spełniającą równanie (8.3). Wobec tego rozwiązanie równania cząstkowego (8.1) ma postać

$$x(\lambda,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu(n+2\nu)!\,\frac{t^{3\nu+2}}{(3\nu+2)!}\qquad(-1<\lambda<1).$$

Łatwo udowodnić, że jest to jedyne rozwiązanie równania (8.1), spełniające warunki (8.2). Wynika to stąd, że równanie charakterystyczne

$$u^2+s^3=0$$

ma pierwiastki $-is^{3/2}$ i $is^{3/2}$, z których żaden nie jest logarytmem.

Uwaga. Stałych $c_0, c_1, c_2, \ldots$ we wzorze (8.4) nie można wyznaczać bezpośrednio przez podstawienie szeregu $c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+\ldots$ do równania

$$x''+s^3x=1+\lambda+\lambda^2+\ldots$$

i przez porównanie współczynników przy potęgach λ. Wtedy znaleźlibyśmy co prawda pewien wzór rekurencyjny, ale mielibyśmy trudności z wyznaczeniem dwóch początkowych współczynników c_0 i c_1, które nie mogą być ustalone w sposób dowolny.

Przykład 2. Rozwiązać równanie

$$x_{\lambda^4}+2x_{\lambda^2t^2}+x_{t^4}=0 \qquad (-1<\lambda<\infty,\ 0\leqslant t<\infty) \tag{8.5}$$

przy warunkach początkowych

$$x(\lambda,0)=0,\quad x_t(\lambda,0)=0,\quad x_{t^2}(\lambda,0)=0,\quad x_{t^3}(\lambda,0)=\frac{1}{1+\lambda}e^{-1-\lambda}. \tag{8.6}$$

Równanie operatorowe ma postać

$$x^{(4)}+2s^2x''+s^4x=\frac{1}{1+\lambda}e^{-1-\lambda}. \tag{8.7}$$

Prawa strona tego równania da się przedstawić w postaci całki

$$\int_1^\infty e^{-(1+\lambda)\alpha}\,d\alpha.$$

Możemy napisać od razu rozwiązanie równania

$$x^{(4)}+2s^2x''+s^4x=e^{-(1+\lambda)\alpha};$$

jest nim funkcja

$$x_\alpha(\lambda)=\frac{e^{-(1+\lambda)\alpha}}{(\alpha^2+s^2)^2}=\left\{\frac{1}{2\alpha^3}e^{-(1+\lambda)\alpha}(\sin\alpha t-\alpha t\cos\alpha t)\right\}.$$

Całkując tę funkcję względem parametru α w granicach od 1 do ∞, dostaniemy formalne rozwiązanie równania (8.5)

$$x(\lambda)=\int_1^\infty\frac{e^{-(1+\lambda)\alpha}}{(\alpha^2+s^2)^2}\,d\alpha, \tag{8.8}$$

a stąd

$$x(\lambda,t)=\frac{1}{2}\int_1^\infty\frac{1}{\alpha^3}e^{-(1+\lambda)\alpha}(\sin\alpha t-\alpha t\cos\alpha t)\,d\alpha.$$

Nietrudno jest zauważyć jednostajną zbieżność tej całki i jej pochodnych względem λ; zatem znalezione wyrażenie nie tylko formalnie, ale faktycznie spełnia dane równanie. Jest to jedyne rozwiązanie tego równania, spełniające warunki (8.6), gdyż równanie charakterystyczne

$$u^4+2u^2s^2+s^4=0$$

ma pierwiastki (podwójne) $-is$, is, które nie są logarytmami.

ROZDZIAŁ II

Transformacje całkowe

§ 9. Transformacja Laplace'a

W ostatnim przykładzie poprzedniego paragrafuy mieliśm do czynienia z całką niewłaściwą (8.8). Należy ją rozumieć jako granicę

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{e^{-(1+\lambda)\alpha}}{(\alpha^2+s^2)^2}\,d\alpha.$$

Podobnie należy rozumieć inne całki niewłaściwe. Weźmy w szczególności całkę

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(\lambda)\,d\lambda = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta e^{-\lambda s}f(\lambda)\,d\lambda,$$

gdzie f jest dowolną funkcją klasy $\mathcal{K}$.

Ale wobec paragrafu 5 mamy

$$\int_0^\beta e^{-\lambda s}f(\lambda)\,d\lambda = \begin{cases} f(t) & \text{dla } 0\leqslant t<\beta,\\ 0 & \text{dla } \beta<t<\infty\end{cases}$$

i w granicy

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(\lambda)\,d\lambda = \{f(t)\}. \tag{9.1}$$

Granica ta oczywiście zawsze istnieje, jakąkolwiek weźmiemy funkcję f klasy $\mathcal{K}$.

Pomyślmy sobie na chwilę, że litera s w całce (9.1) nie jest operatorem różniczkowym, lecz zwykłą zmienną zespoloną. Wtedy całka ta, o ile pozostanie zbieżna, będzie przedstawiała funkcję analityczną zmiennej s. W ten sposób każdej funkcji f, dla której

rozważana całka jest zbieżna, można przyporządkować pewną funkcję analityczną

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt. \tag{9.2}$$

Takie przyporządkowanie nazywamy *transformacją Laplace'a*.

§ 10. Transformacja Laplace'a jako podstawa rachunku operatorów

Zastosujmy transformację Laplace'a do rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego

$$x'(t)-x(t)=e^t \tag{10.1}$$

z warunkiem początkowym $x(0)=1$.

Mamy oczywiście równość

$$\int_0^\infty e^{-ts}[v'(t)-x(t)]\,dt = \int_0^\infty e^{-ts}e^t\,dt; \tag{10.2}$$

symbol s traktujemy tu jako zmienną zespoloną.

Całkując przez części, znajdujemy

$$\int_0^\infty e^{-ts}x'(t)\,dt = [e^{-ts}x(t)]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-ts}x(t)\,dt;$$

jeżeli założymy, że funkcja $x(t)$ nie wzrasta zbyt szybko, to będziemy mieli $[e^{-ts}x(t)]_0^\infty = -x(0) = -1$ i będzie można napisać

$$\int_0^\infty e^{-ts}x'(t)\,dt = -1+sX(s),$$

gdzie

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-ts}x(t)\,dt.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\int_0^\infty e^{-ts}e^t\,dt = \frac{1}{s-1},$$

możemy równanie (10.2) napisać w postaci

$$sX(s)-X(s)=1+\frac{1}{s-1}. \tag{10.3}$$

Stąd z łatwością możemy wyliczyć

$$X(s)=\frac{s}{(s-1)^2}.$$

Zagadnienie sprowadza się teraz do znalezienia funkcji $x(z)$, która by spełniała równanie całkowe

$$\int_0^\infty e^{-ts}x(t)\,dt=\frac{s}{(s-1)^2}.$$

Można to zrobić przez zastosowanie tak zwanej *transformacji odwrotnej*

$$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}\frac{s}{(s-1)^2}\,ds, \tag{10.4}$$

gdzie całkowanie odbywa się wzdłuż prostej równoległej do osi urojonej i położonej od niej na prawo. Stosując metodę rezyduów można stąd wyliczyć, że

$$x(t)=(1+t)e^t.$$

Z przykładu tego widać, że abstrahując od wykonywania samych transformacyj, rachunek pod względem formalnym przypomina metodę rozwiązywania równań różniczkowych, podaną w części pierwszej tej książki.

Stosując transformację Laplace'a, można również rozwiązywać równania cząstkowe. Rachunki formalne będą podobne, jak przy stosowaniu metod, podanych w drugiej i trzeciej części tej książki, z tym że dochodzi wykonanie transformacji Laplace'a na początku rachunków oraz wykonanie transformacji odwrotnej dla znalezienia ostatecznej postaci rozwiązania.

Metoda ta lub jej pokrewne są podawane w większości współczesnych podręczników operatorów.

§ 11. Porównanie metody bezpośredniej i metody transformacji Laplace'a

Formalne podobieństwo metody transformacji Laplace'a i metody bezpośredniej, wyłożonej w tej książce, można matematycznie bliżej sprecyzować przez ustalenie pewnego *izomorfizmu*. Nie będziemy tu podawali definicji tego dość abstrakcyjnego pojęcia, pokażemy tylko na przykładzie, o co chodzi. Otóż po wykonaniu transformacji Laplace'a na funkcji e^t znaleźliśmy funkcję $\frac{1}{s-1}$. Mówimy, że funkcja $\frac{1}{s-1}$ jest *transformatą* funkcji e^t i zapisujemy to zwykle w postaci

$$\mathcal{L}\{e^t\}=\frac{1}{s-1}. \tag{11.1}$$

Z drugiej strony, w metodzie bezpośredniej mamy wzór

$$\{e^t\}=\frac{1}{s-1}. \tag{11.2}$$

We wzorze (11.1) litera s jest zmienną zespoloną, a we wzorze (11.2) s jest operatorem różniczkowym. Funkcji analitycznej $\frac{1}{s-1}$ z wzoru (11.1) odpowiada operator $\frac{1}{s-1}$ z wzoru (11.2). W rachunkach formalnych symbol $\frac{1}{s-1}$ traktujemy w obu przypadkach tak samo, bez względu na to czy oznacza on funkcję analityczną, czy operator. I na tym, z grubsza mówiąc, polega izomorfizm.

Mimo formalnego podobieństwa metody transformacji Laplace'a i metody bezpośredniej, metody te nie są równoważne. Jeżeli funkcję e^t po prawej stronie równania (10.1) zastąpimy na przykład przez funkcję $(2t-1)e^{t^2}$ (zob. str. 37), to stosowanie transformacji Laplace'a stanie się niemożliwe z powodu rozbieżności całki

$$\int_0^\infty e^{-ts}(2t-1)\,e^{t^2}\,dt.$$

Metoda ta ogranicza więc zakres stosowalności rachunku operatorów do takiej klasy funkcyj, dla których całka

$$\int_0^\infty e^{-ts}f(t)\,dt$$

jest zbieżna.

Ale nawet w przypadku, gdy po prawej stronie równania (10.1) pozostawimy funkcję e^t, metoda transformacji Laplace'a nie daje pełnego rozwiązania zagadnienia, gdyż w czasie rachunków trzeba założyć, że szukana funkcja nie wzrasta zbyt szybko, czyli dokładniej mówiąc, jest *transformowalna*. Wskutek tego nie wiemy, czy znalezione rozwiązanie jest jedyne.

Podobnie w przypadku równań różniczkowych cząstkowych metoda transformacji Laplace'a nie daje odpowiedzi, czy znalezione rozwiązania są jedyne.

§ 12. Inne metody pokrewne

Istnieje wiele podręczników rachunku operatorów, w których wykład jest oparty na transformacji

$$F(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt, \tag{12.1}$$

gdzie p jest zmienną zespoloną. Różni się ona tym od transformacji Laplace'a (9.2), że przed całką dochodzi jeszcze czynnik p. Użycie litery p w miejsce s nie ma oczywiście żadnego znaczenia matematycznego i jest tylko kwestią zwyczaju. Tablice dla transformacji (12.1) można otrzymać z tablic transformacji Laplace a zastępując literę s przez p i dopisując przed każdym wzorem czynnik p.

W niektórych książkach punktem wyjścia bywa transformacja odwrotna do (12.1)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt}\frac{F(p)}{p}\, dp;$$

całkowanie w tym wzorze należy wykonywać wzdłuż prostej równoległej do osi urojonej, dobranej odpowiednio do każdej funkcji $F(p)$.

Prócz tego istnieją różne odmiany tych metod. Na przykład niektórzy autorowie wprowadzają obok zbioru funkcyj zmiennej rzeczywistej t i zbioru funkcyj analitycznych zmiennej zespolonej p jeszcze zbiór operatorów, który jest zdefiniowany przez izomorfizm z rozważanym zbiorem funkcyj analitycznych. Wszystkich tych metod nie będziemy już omawiali, odsyłając zainteresowanego czytelnika do literatury podanej na końcu książki.

CZĘŚĆ PIĄTA

WZORY I TABLICE

I. Funkcje specjalne

1. Funkcja gamma Eulera:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}dt \qquad (\lambda > 0) \qquad \text{(I, § 54)}$$

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda), \qquad \Gamma(n) = (n-1)! \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)} = \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}dt \qquad (\lambda>0,\ \mu>0)$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-\tau^2}d\tau = \sqrt{\pi}$$

2. Funkcja błędu:

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\tau^2}d\tau \qquad \text{(I, § 55)}$$

$$\operatorname{cerf} t = 1 - \operatorname{erf} t$$

3. Funkcje Bessela:

$$J_0(\lambda) = \sum_{\nu=0}^\infty (-1)^\nu \frac{\lambda^{2\nu}}{2^{2\nu}(\nu!)^2}, \qquad J_1(\lambda) = \sum_{\nu=0}^\infty (-1)^\nu \frac{\lambda^{1+2\nu}}{2^{1+2\nu}\nu!(1+\nu)!} \qquad \text{(II, § 51)}$$

$$J_0'(t) = -J_1(t)$$

$$J_0(i\lambda) = \sum_{\nu=1}^\infty \frac{\lambda^{2\nu}}{2^{2\nu}(\nu!)^2}, \qquad J_1(i\lambda) = i\sum_{\nu=0}^\infty \frac{\lambda^{1+2\nu}}{2^{1+2\nu}\nu!(1+\nu)!}$$

$$J_n(\lambda) = \sum_{\nu=0}^\infty (-1)^\nu \frac{\lambda^{n+2\nu}}{2^{n+2\nu}\nu!(n+\nu)!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \text{(II, § 53)}$$

$$J_n(i\lambda) = i^n\sum_{\nu=0}^\infty \frac{\lambda^{n+2\nu}}{2^{n+2\nu}\nu!(n+\nu)!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$